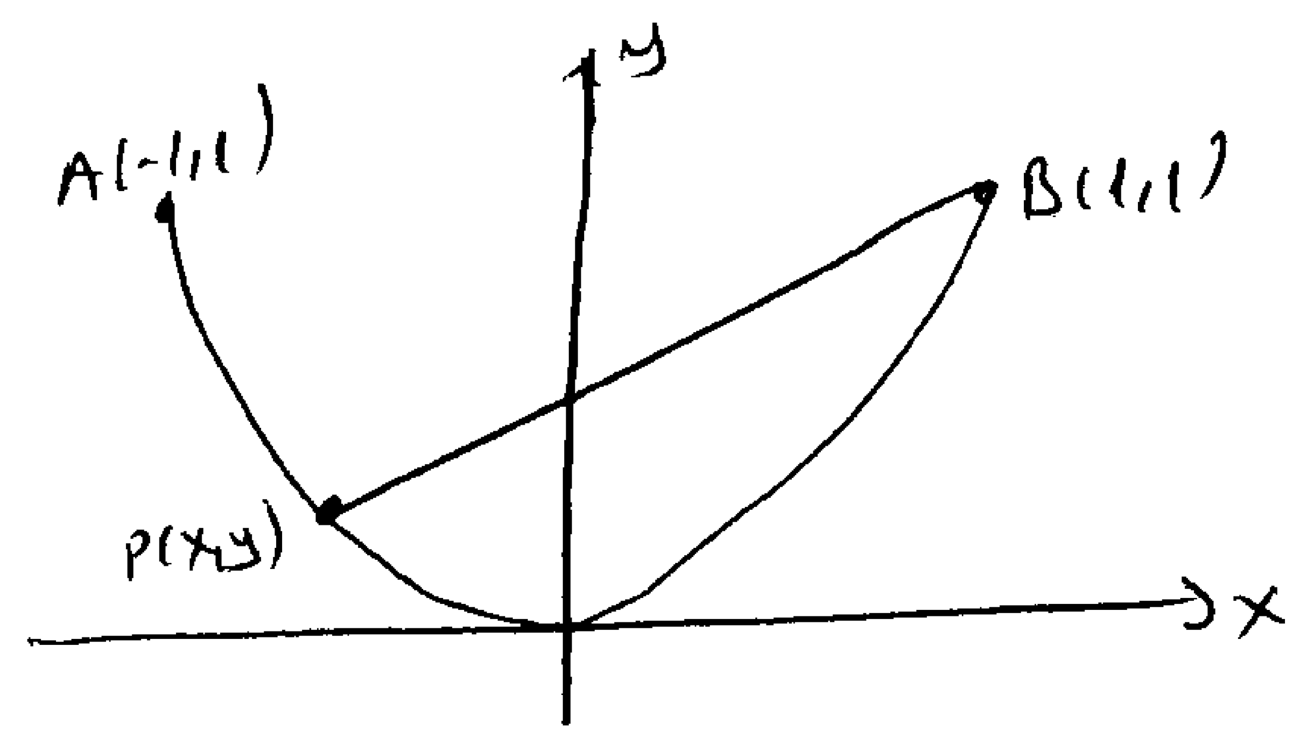
MAT102 ANALİZ II FİNAL SORULARI VE ÇÖZÜMLERİ

① A(2,4) ve B(-1,1) noktaları verilsin. $|PA|^2+|PB|^2$ toplamını en küçük yapan $y=x^2$ parabolü üzerindeki P noktasını bulunuz.

Çözüm:



$|PA|^2+|PB|^2=(x+1)^2+(y-1)^2+(x-1)^2+(y-1)^2$

$y=x^2$ olduğundan

$f(x)=(x+1)^2+(x^2-1)^2+(x-1)^2+(x^2-1)^2$

ifadesi $\mathbb{R}$ de minimum yapılacak.

Düzenlenirse $f(x)=2.(x^4-x^2+2)$ bulunur.

$f'(x)=2(4x^3-2x)=4x(2x^2-1)$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ kritik noktalardır.

$\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$ min. noktalar $f(\mp\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{7}{2}$ min. değer.

		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$	
$4x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2x^2-1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f'	$-$		$+$		$-$		$+$
f	↘		↗		↘		↗

② Ders notlarında var.

③ Ters fonksiyonun türevi teoremini kullanarak $x\in[-5,\infty)$ olmak üzere $f(x)=\frac{\sqrt{3x+15}-21}{2}$ için $(f^{-1})'(-9)$ değerini bulunuz.

Çözüm: $x\geq -5$ için f sürekli,

$f'(x)=\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x+15}}}{2}=\frac{3}{4\sqrt{3x+15}}>0 \Rightarrow f$ 1-1, $f(-2)=-9$ old., $f^{-1}(-9)=-2$ dir.

$(f^{-1})'(-9)=\frac{1}{f'(f^{-1}(-9))}=\frac{1}{f'(-2)}=\frac{1}{4\sqrt{3(-2)+15}}=4 \Rightarrow \boxed{(f^{-1})'(-9)=4}$ olur.

④ Aşağıdaki limitlerden istediğiniz iki tanesini L'Hospital kuralını kullanarak çözünüz.

(a) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(x-\frac{\pi}{2})\cdot\tan 3x$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^n}{x},\ n\in\mathbb{N}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\sin x}$

Çözüm:

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{2}).\tan 3x \overset{0.\infty}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{\cot(3x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{-3\csc^2(3x)} =$

$= \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\sin^2(3x)}{3} = -1/3$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n.(\ln x)^{n-1}.\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n.(\ln x)^{n-1}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n.(n-1).(\ln x)^{n-2}}{x} = \dots = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n(n-1)\dots 3.2.1.(\ln x)^{n-n}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n!}{x} = 0$ dır.

(c) 0^0 belirsizliği var. $f(x)=(\sin x)^{\sin x} \Rightarrow \ln f(x) = \sin x.\ln(\sin x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \ln(\sin x) \overset{0.(-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sin x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$

$= -\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{\sin x} = e^0 = 1$ bulunur.

5) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{12+4x-x^2}}\,dx = ?$ (b) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{1+\sin x-\cos x} = ?$

Çözüm: (a)

$I = \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{12+4x-x^2}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{-(x^2-4x-12)}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{-(x^2-4x+2^2-2^2-12)}}\,dx =$

$= \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{-[(x-2)^2-4^2]}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{4^2-(x-2)^2}}\,dx$ $\left\{ \begin{array}{l} x-2 = 4\sin t \text{ dön. yapılır.} \\ dx = 4\cos t\,dt, \\ \sqrt{16-(x-2)^2} = 4\cos t \end{array}\right.$

$= \displaystyle\int \frac{(2+4\sin t)^2}{4\cos t}.4\cos t\,dt = \int (4+16\sin t+16\sin^2 t)\,dt =$

$= 4t - 16\cos t + \frac{16}{2}\displaystyle\int (1-\cos 2t)\,dt = 4t - 16\cos t + 8t - 4\sin 2t + c$

$= 12t - 16\cos t - 8\sin t\cos t + c$

b) $I = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$ $\quad t = \tan\frac{x}{2}$ dön. yapılırsa

$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{dt}{t^2+t} = \int \frac{dt}{t(1+t)} =$$

$\left[\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \quad A=1, B=-1 \right]$

$$= \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln t - \ln|t+1| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right| + c$$

$$\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{1+\sin x - \cos x} = \left(\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right|\right)\Bigg|_{\pi/2}^{2\pi/3} = \ln\left|\frac{\tan\pi/3}{1+\tan\pi/3}\right| - \ln\left|\frac{\tan\pi/4}{1+\tan\pi/4}\right|$$

$$= \ln\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \ln 2 \quad \text{bulunur.}$$

(6) $[1,3]$ için P düzgün olduğundan

$$\|P\| = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_5 = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\left[1, \frac{7}{5}\right], \left[7/5, 9/5\right], \left[9/5, 11/5\right], \left[11/5, 13/5\right], \left[13/5, 3\right]$$

kapalı alt aralıkları oluşur.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2} \text{ olup}$$

$f'(x) < 0$ dır. O zaman

$$A(f,P) = f\left(7/5\right)\cdot\frac{2}{5} + f\left(\frac{9}{5}\right)\cdot\frac{2}{5} + f\left(\frac{11}{5}\right)\cdot\frac{2}{5} +$$

$$f\left(13/5\right)\cdot\frac{2}{5} + f(3)\cdot\frac{2}{5} = 0{,}73102$$

(7) $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ olsun. O zaman $f, g \in \mathcal{B}([a,b])$ olup $F = f+g$ için $F \in \mathcal{B}([a,b])$ dir.

Ayrıca $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$\|P\| < \delta$ olduğunda

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(f)\Delta_k < \varepsilon \quad \text{ve} \sum_{k=1}^{n} w_k(g).\Delta_k < \varepsilon$$

o.ş. $\exists P \in \mathbb{P}$ vardır. Buradan $\forall k \in 1,2,\ldots,n$ için

$$w_k(F) = \sup\{|(f+g)(x) - (f+g)(y)| : x,y \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$\leq w_k(f) + w_k(g)$$

olduğundan $\|P\| < \delta$ old.da

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(F).\Delta_k \leq \sum_{k=1}^{n} w_k(f).\Delta_k + \sum_{k=1}^{n} w_k(g).\Delta_k < 2\varepsilon$$

ifadesi yazılır. Bu ise $F = f+g \in \mathcal{R}([a,b])$ demektir. Öte yandan $[a,b]$'nin her (P,γ) işaretlenmiş parçalanışı için

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(\gamma_k) + g(\gamma_k)]\Delta_k$$

ayrı limitler var old.dan

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\gamma_k).\Delta_k + \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(\gamma_k).\Delta_k$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{dır.}$$

(8) $|x+1|$ için kritik nokta $x=-1$

$|2x-1|$ için kritik nokta $x=\frac{1}{2}$

$[\![\frac{x}{2}]\!]$'nin adım boyu 2 br olup

$$\int_{-2}^{3}\left(|x+1|+[\![\tfrac{x}{2}]\!]\cdot|2x-1|\right)dx=$$

$$\int_{-2}^{3}|x+1|.dx+\int_{-2}^{3}[\![\tfrac{x}{2}]\!]\cdot|2x-1|.dx=$$

$$\int_{-2}^{-1}|x+1|.dx+\int_{-1}^{3}|x+1|.dx+\int_{-2}^{0}[\![\tfrac{x}{2}]\!]\cdot|2x-1|.dx+$$

$$\int_{0}^{2}[\![\tfrac{x}{2}]\!]\cdot|2x-1|.dx+\int_{2}^{3}[\![\tfrac{x}{2}]\!]\cdot|2x-1|.dx=$$

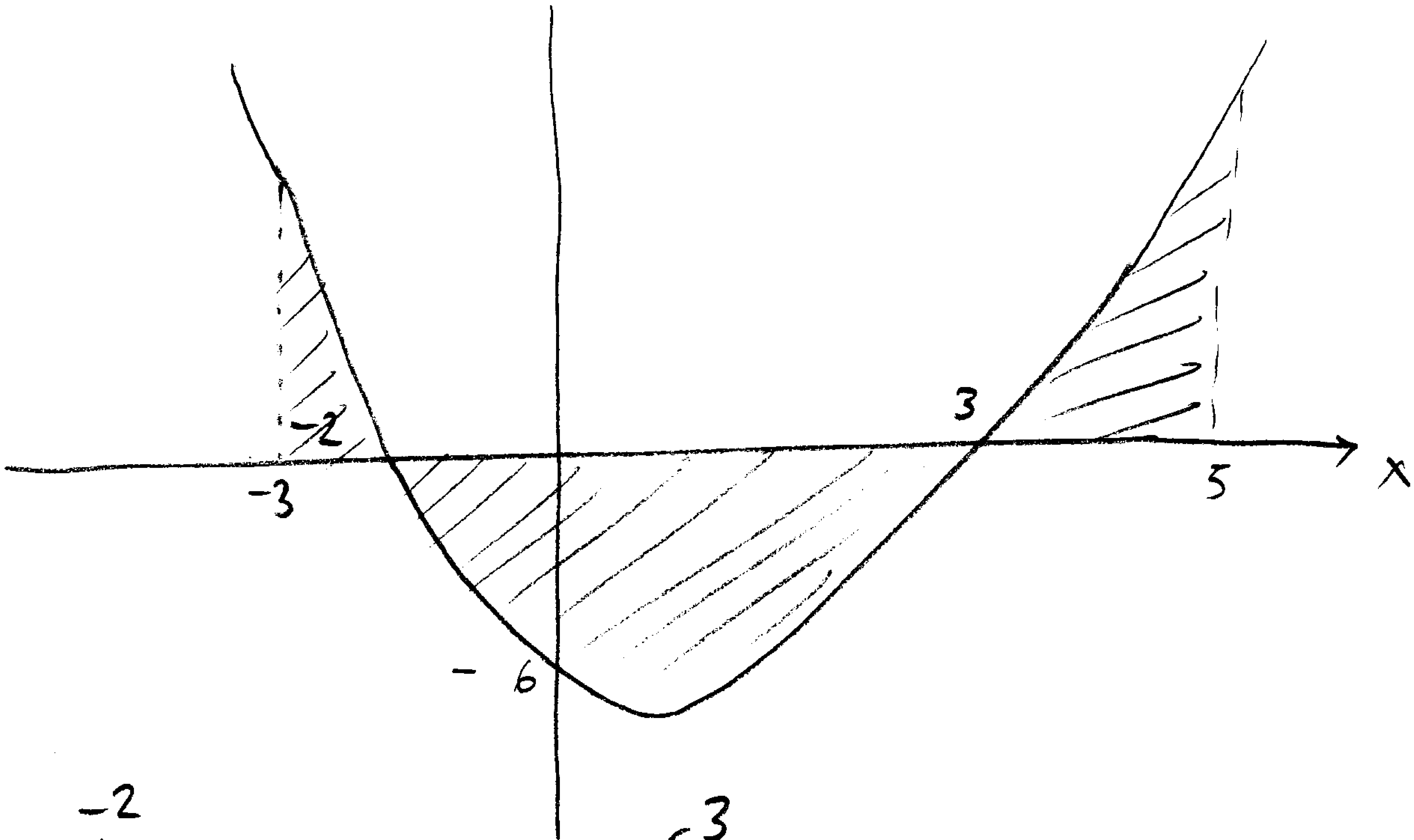
$$=\int_{-2}^{-1}(-x-1)dx+\int_{-1}^{3}(x+1)dx+\int_{-2}^{0}-|2x-1|dx+$$

$$\int_{2}^{3}|2x-1|.dx$$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{-2}^{-1}+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{3}+(x^2-x)\Big|_{-2}^{0}$$

$$+(x^2-x)\Big|_{2}^{3}=\frac{17}{2}+(-6)+4=\frac{13}{2}$$

(3) $y = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$



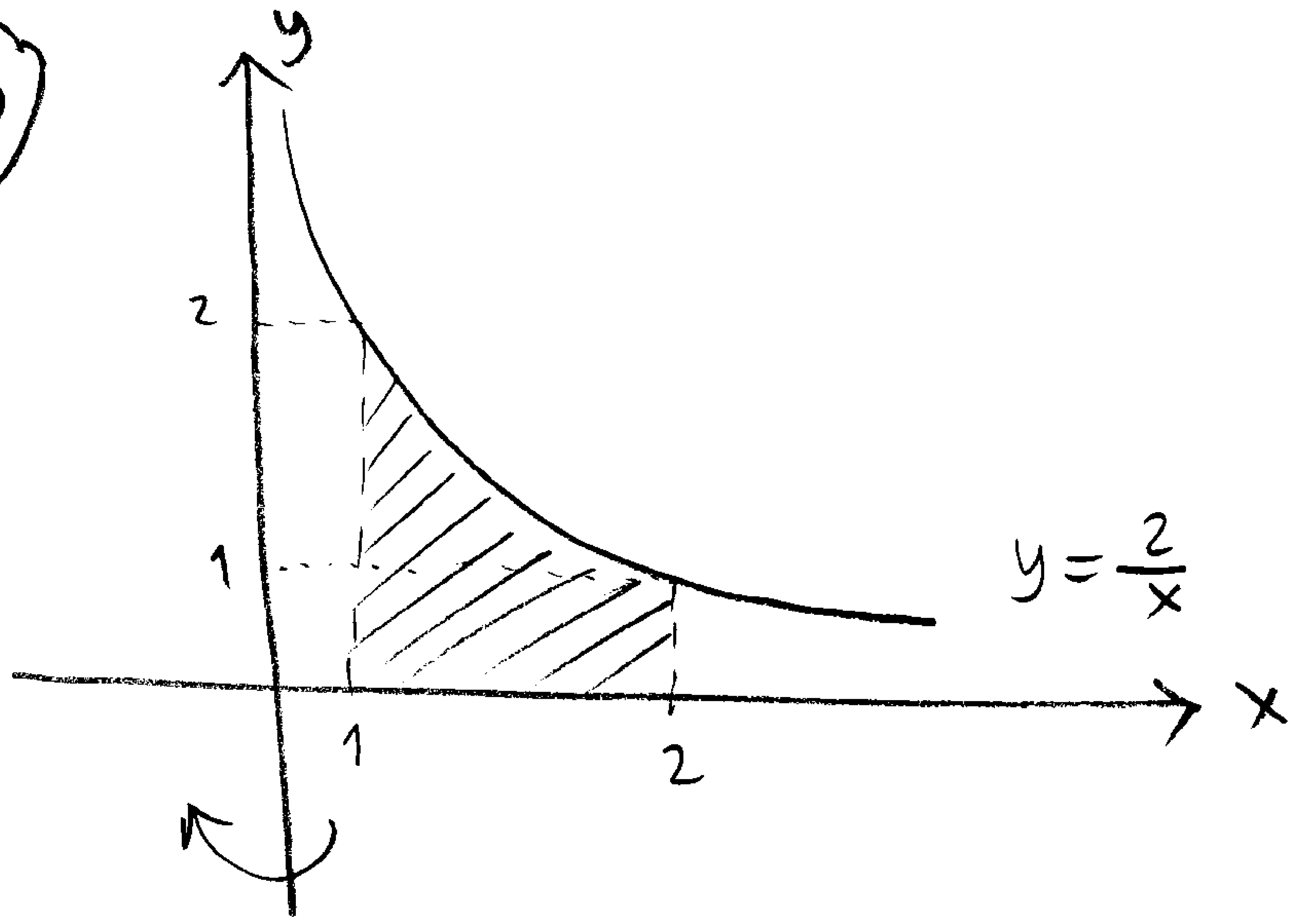
$$A = \int_{-3}^{-2} (x^2 - x - 6)\,dx + \int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\,dx$$

$$+ \int_{3}^{5} (x^2 - x - 6)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x\right)\Bigg|_{-3}^{-2} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x\right)\Bigg|_{3}^{5} + \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{2}^{3}$$

$$= \frac{109}{3}$$

(10)



Kabuk yöntemiyle

$$V = 2\pi \int_1^2 |x| \cdot \left|\frac{2}{x} - 0\right| \cdot dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 2 \cdot dx = 2\pi (2x)\Big|_1^2 = 6\pi \text{ br}^3.$$

Disk yöntemiyle

$$V = \pi \int_0^1 (2^2 - 1^2)\, dy + \pi \int_1^2 \left(\frac{4}{y^2} - 1\right) dy$$

$$= 3\pi + \pi \cdot \left(\frac{-4}{y} - y\right)\Big|_1^2 = 6\pi \text{ br}^3.$$